Aufgabe 1

> ⓘ Question
>
> Wie lautet die schwache Formulierung des Gleichungssystems komponentenweise?

Gleichungen: Brinkmann-Forchheimer Gleichung

$$\frac{1}{\varphi}\partial_t \boldsymbol{u} + \frac{1}{\varphi^2}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \frac{\nu}{\varphi}\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{\varrho}\nabla p + \frac{\nu}{K}\boldsymbol{u} + \frac{c_F}{\sqrt{K}}|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u} = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

Variablen und Konstanten

Abhängige Variablen:

- $\boldsymbol{u}$: Strömungsgeschwindigkeit $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$
- p: Druck $\left[\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot s^2}\right]$

Konstanten:

- φ: Anteil Fluid $\in [0,1]$ $[-]$
- ν: Dynamische Viskosität $\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right]$ $\left(\text{für Wasser @ } 90^\circ\mathrm{C} = 3.248 * 10^{-7}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right)$
- ϱ: Dichte $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$ $\left(\text{für Wasser @ } 90^\circ\mathrm{C} = 965.31\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$
- K: Permeabilität $[\mathrm{m}^2]$
- c_F: Forchheimerkonstante $[-]$
- d_P: Partikeldurchmesser $[\mathrm{m}]$
- α, β: Formfaktoren (werden empirisch bestimmt, wir verwenden: $\alpha = 1.75, \beta = 150$)

Die Permeabilität K ist definiert durch das Modell von Kozeny:

$$\mathrm{K} = \frac{d_P^2\,\varphi^3}{\beta(1-\varphi)^2}$$

Die Forchheimer Konstante c_F ist definiert durch:

$$c_F = \alpha \beta^{-1/2} \varphi^{-3/2}$$

Randbedingungen

Der Fluss am Eingang des Siebs wird wie folgt berechnet:

$$A = \frac{d^2 * \pi}{4} = \frac{(0.04\mathrm{m})^2 * \pi}{4} = 0.00126\mathrm{m}^2$$

$$u_{\mathrm{in}} = \frac{V}{t\,A} = \frac{3e^{-5}\mathrm{m}^3}{15\mathrm{s} \cdot 0.00126\mathrm{m}^2} = 0.00159\,\mathrm{m/s}$$

Die Randbedingungen für die Flussgeschwindigkeit sind gegeben durch

$$\partial\Omega = \Gamma_{\mathrm{Wall}} + \Gamma_{\mathrm{Inlet}} + \Gamma_{\mathrm{Outlet}}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{on}\, \Gamma_{\mathrm{Wall}}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (0, -u_{\mathrm{in}}) \quad \text{on}\, \Gamma_{\mathrm{Inlet}}$$

Die restlichen Randbedingungen werden bewusst offen gelassen.

Schwache Gleichung

Zur Diskretisierung der Flussströmung $\boldsymbol{u}$ benutzen wir eine stetige H1-Vektor Diskretisierung 2. Ordnung mit zusätzlicher innerer Ordnung 3 und für den Druck eine diskontinuierliche Diskretisierung 1. Ordnung.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in V = P^{2+} \subset H^1(\Omega)$$

$$p(\boldsymbol{x}) \in Q = P^{1,dg} \subset H^1(\Omega)$$

Die starke Gleichung ist gegeben durch

$$\frac{1}{\varphi^2}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \frac{\nu}{\varphi}\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{\varrho}\nabla p + \frac{\nu}{K}\boldsymbol{u} + \frac{c_F}{\sqrt{K}}|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

Wir vernachlässigen den zeitabhängigen Teil der Gleichung, da wir nur eine stationäre Lösung der Gleichung berechnen.

Die einzelnen Komponenten der schwachen Gleichung berechnen sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi^2}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= \frac{1}{\varphi^2}(\partial_x u_x + \partial_y u_y)\boldsymbol{u} = \frac{1}{\varphi^2}\begin{pmatrix}(\partial_x u_x + \partial_y u_y)u_x \\ (\partial_x u_x + \partial_y u_y)u_y\end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi^2}\begin{pmatrix}\langle \nabla u_x, u\rangle \\ \langle \nabla u_y, u\rangle\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\varphi^2}\langle \nabla u, u\rangle \;\rightarrow\; \frac{1}{\varphi^2}\int_\Omega ((\nabla u)u)v\,d\boldsymbol{x} \quad \forall v \in V = P^{2+} \subset H^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\nu}{\varphi}\Delta \boldsymbol{u} &= \frac{\nu}{\varphi}\begin{pmatrix}\Delta u_x \\ \Delta u_y\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \frac{\nu}{\varphi}\int_\Omega \begin{pmatrix}\Delta u_x \\ \Delta u_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_x \\ v_y\end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \frac{\nu}{\varphi}\int_\Omega \begin{pmatrix}\nabla u_x \\ \nabla u_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\nabla v_x \\ \nabla v_y\end{pmatrix} d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{\nu}{\varphi}\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, d\boldsymbol{x} \quad \forall v \in V = P^{2+} \subset H^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho}\nabla p \;\rightarrow\; \frac{1}{\varrho}\int_\Omega \begin{pmatrix}\partial_x p \\ \partial_y p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_x \\ v_y\end{pmatrix} d\boldsymbol{x} &= \frac{1}{\varrho}\int_\Omega \partial_x p\, v_x + \partial_y p\, v_y\, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{\varrho}\int_\Omega (\partial_x\, v_x + \partial_y\, v_y)p\, d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{\varrho}\int_\Omega (\nabla\cdot v)p\, d\boldsymbol{x} \quad \forall v \in V = P^{2+} \subset H^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\nu}{K}\boldsymbol{u} \;\rightarrow\; \frac{\nu}{K}\int_\Omega u\, v\, d\boldsymbol{x} \quad \forall v \in V = P^{2+} \subset H^1(\Omega)
$$

$$
\frac{c_F}{\sqrt{K}}|u|u \;\rightarrow\; \frac{c_F}{\sqrt{K}}\int_\Omega |u|u\, v\, d\boldsymbol{x} \quad \forall v \in V = P^{2+} \subset H^1(\Omega)
$$

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{u} \;\rightarrow\; \int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\, q\, d\boldsymbol{x} \quad \forall q \in Q = P^{1,dg} \subset H^1(\Omega)
$$

Dies resultiert in der kompletten schwachen Gleichung

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{\varphi^2}((\nabla u)u)v + \frac{\nu}{\varphi}\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \frac{1}{\varrho}(\nabla\cdot v)p + \frac{\nu}{K}u\, v + \frac{c_F}{\sqrt{K}}|u|u\, v\; + (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\, q\, d\boldsymbol{x} = 0 \\
\forall v \in V = P^{2+} \subset H^1(\Omega),\ \forall q \in Q = P^{1,dg} \subset H^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Question

Berechnen Sie initial numerisch eine Lösung des Modell's ohne dem konvektiven Term $\frac{1}{\varphi^2}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$, daher eine sogenannte Stokes-Lösung. Sie können dazu die Bilinearform aus Listing 5 benutzen und die Systemmatrix mit Assemble berechnen. Da initial $\boldsymbol{u} = 0$ gilt, wird der nichtlineare Term automatisch nicht berücksichtigt. Berücksichtigen Sie dabei die Randbedingungen, insbesondere die beim Einlauf „inlet“, unter dem vorgegebenen Volumenstrom.

Die Stokesgleichung ist definiert als:

$$\int_\Omega \frac{\nu}{\varphi}\langle\nabla u, \nabla v\rangle + \frac{1}{\varrho}(\nabla\cdot v)p\, d\boldsymbol{x} = 0$$

für

$$\forall v \in V = P^{2+} \subset H^1(\Omega)$$

Um diese lösen zu können, wird zuerst eine neue Bilinearform ohne die konvektiven und porösen Terme gebildet und die Systemmatrix mit `Assemble` berechnet:

```
stokes = nu/phi*InnerProduct(grad(u), grad(v))+1/rho*div(v)*p

a2 = BilinearForm(X, symmetric=True)
a2 += stokes*dx
a2 += div(u)*q*dx
a2.Assemble()
```

Die oben gezeigte Dirichlet Randbedingung Γ_{inlet} definiert sich in Code folgendermassen:

```
area_inlet = 0.02**2*np.pi
v_ms = (-0.04/15/1000)/area_inlet

inlet_vel = CoefficientFunction((0.,v_ms))
gfu.Set(inlet_vel,definedon=mesh.Boundaries("inlet"))
```

Um einen direkten Gleichunglöser verwenden zu können, muss das Problem in die Form $A \cdot x = b$ gebracht werden.

$$A \cdot (x_0 + x_D) = 0$$
$$A \cdot x_0 = -A \cdot x_D$$

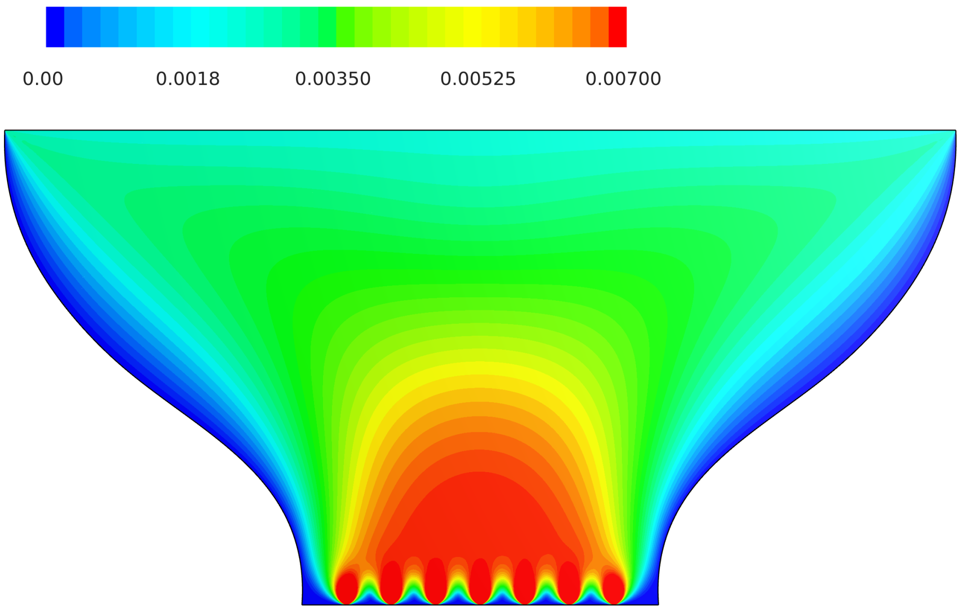
für

$$x = (u, p)$$
$$x = x_0 + x_D$$

wobei x_0 die Anfangsbedingung und x_D die Dirichlet Randbedingung ist.

Anschliessend kann dann die Lösung numerisch berechnet werden:

```
b = gfx.vec.CreateVector()
b.data = -a2.mat*gfx.vec
gfx.vec.data += a2.mat.Inverse(X.FreeDofs()) * b
```



Question

Berechnen Sie mit Hilfe der Newton-Iteration eine Lösung der vollen Brinkman - Forchheimer Gleichung. Implementieren Sie dazu eine Funktion für das Newton-Verfahren.

Das Newton Verfahren

$$\begin{aligned} &\text{for } n = 0, 1, 2, \dots \\ &\qquad\qquad r_n = F(u_n) \\ &\quad F'(u_n) \cdot \delta u = r_n \\ &\qquad u_{n+1} = u_n - \delta u \end{aligned}$$

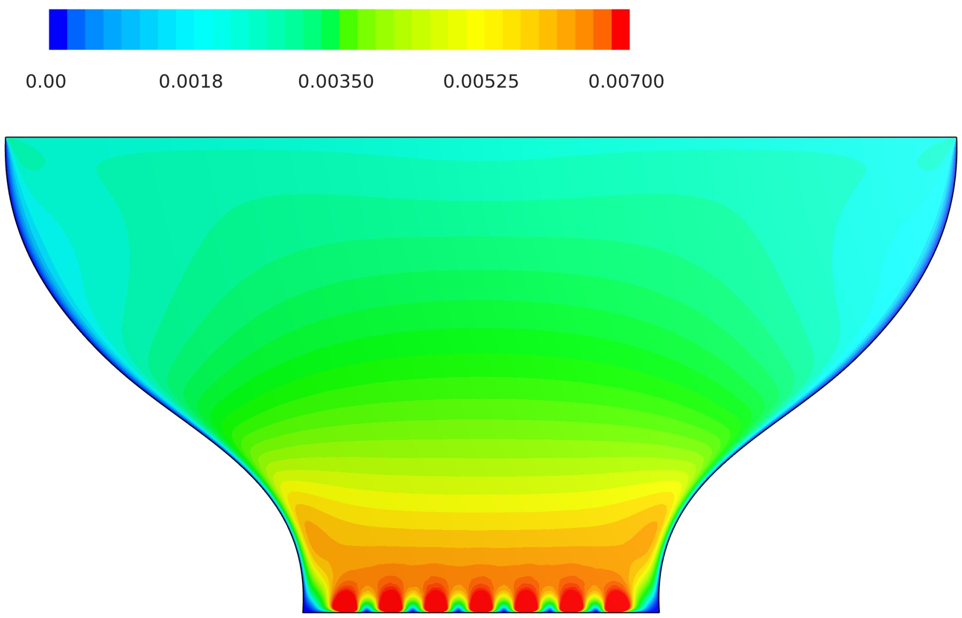
für ein gegebenes u_0 implementiert sich in Code als:

```
def SimpleNewtonSolve(gfu,a,tol=1e-13,maxits=25):
    res = gfu.vec.CreateVector()
    du = gfu.vec.CreateVector()
    fes = gfu.space
    for it in range(maxits):
        print ("Iteration {:3}  ".format(it),end="")
        a.Apply(gfu.vec, res)
        a.AssembleLinearization(gfu.vec)
        du.data = a.mat.Inverse(fes.FreeDofs()) * res
        gfu.vec.data -= du

        #stopping criteria
        stopcritval = sqrt(abs(InnerProduct(du,res)))
        if stopcritval < tol:
            break
```

und kann anschliessend verwendet werden, um eine Lösung der Brinkman - Forchheimer Gleichung zu erhalten:

```
dP.Set(1e-3)
phi.Set(0.8)
SimpleNewtonSolve(gfx, a, tol=1e-12, maxits=20)
```



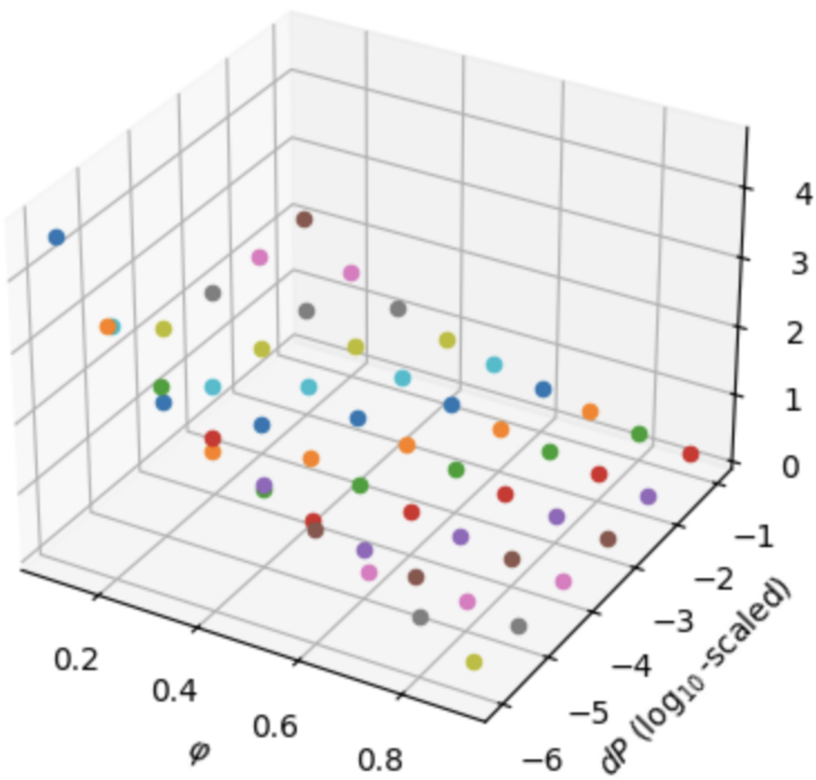
Aufgabe 3

> Question
>
> Studieren Sie den mittleren Druck im Medium abhängig von der Porösität φ und dem mittleren Partikeldurchmesser dP. Wählen Sie selber vernünftige Parameterbereiche.

Wir haben uns dazu entschieden den Druck für folgende Bereiche zu berechnen:

- Partikeldurchmesser: $10^{-6} \leq dP \leq 10^{-1}$
- Porosität: $0 < \varphi < 1$

Wobei wir für die Partikeldurchmesser eine logarithmische (i.e. `np.logspace`) und für die Porosität eine lineare (i.e. `np.linspace`) Schrittgrösse verwendet haben.



Auf der z Achse wird der durchschnittliche Druck dargestellt. Sowohl die y, als auch die z Achsen sind logarithmisch Skaliert.

Leider ist es uns nicht gelungen dies direkt in Matplotlib zu machen, daher stimmen die Labels nicht.

Am meisten Einfluss hat die Porosität. Ist diese klein (also der Kaffeesatz stark zusammengepresst) wird ein ziemlich hoher Druck benötigt. Hingegen bei viel Abstand zwischen den Partikeln fliesst das Wasser auch schon bei leichtem Überdruck.

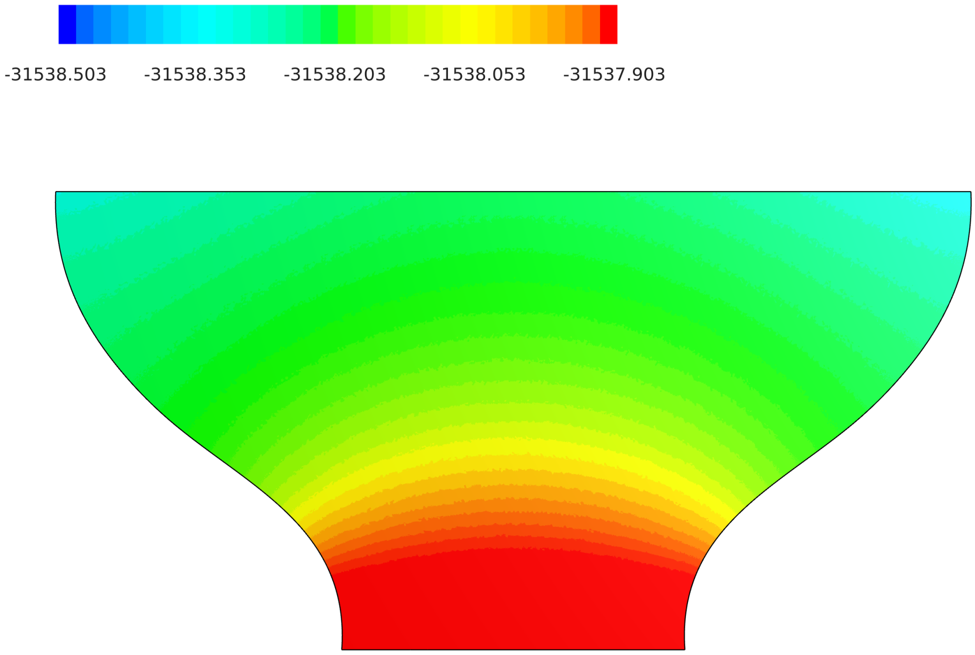
Gemäss Espressoguide beträgt der optimale Brühdruck etwa 9 Bar. Dieser liegt gemäss Berechnungen bei einer Porosität zwischen $0.3 < \varphi < 0.4$ ungeachtet des Partikeldurchmessers. Einzig bei einem Partikeldurchmesser von 10^{-5} wird eine Porosität zwischen $0.4 < \varphi < 0.5$ benötigt.

> ⓘ Question
>
> Studieren Sie die Abhängigkeit vom Sieb. Variieren Sie die Anzahl Löcher und deren Unterschied und vergleichen Sie die Strömung mit / ohne Kaffeepulver. Wie verhält sich der Druck?

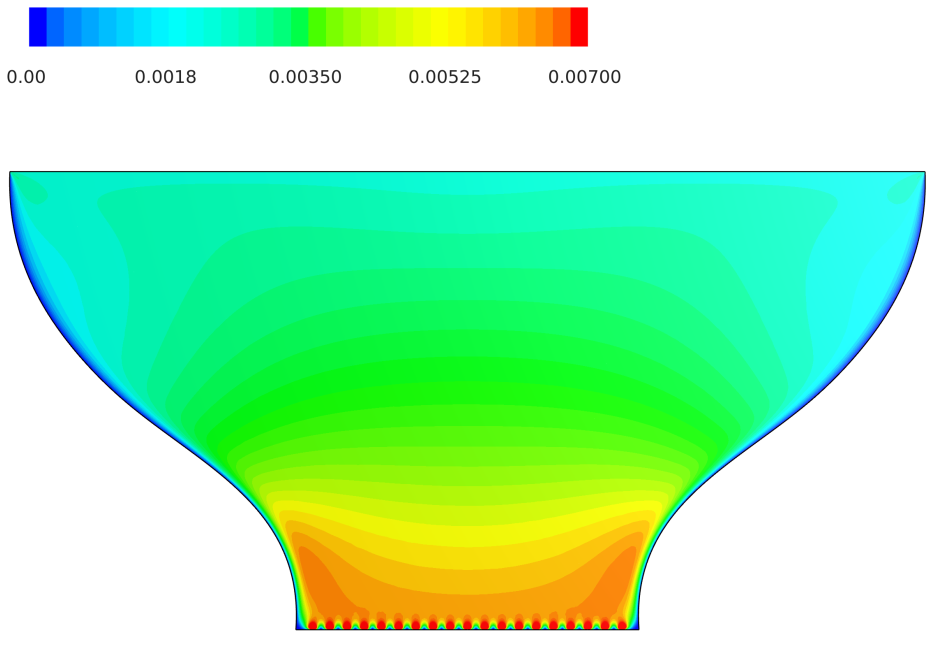
Folgend verschiedene Experimente mit unterschiedlicher Anzahl Löcher sowie Lochdurchmessern.

20 Löcher mit Lochdurchmesser 0.001mm

Flussgeschwindigkeit:

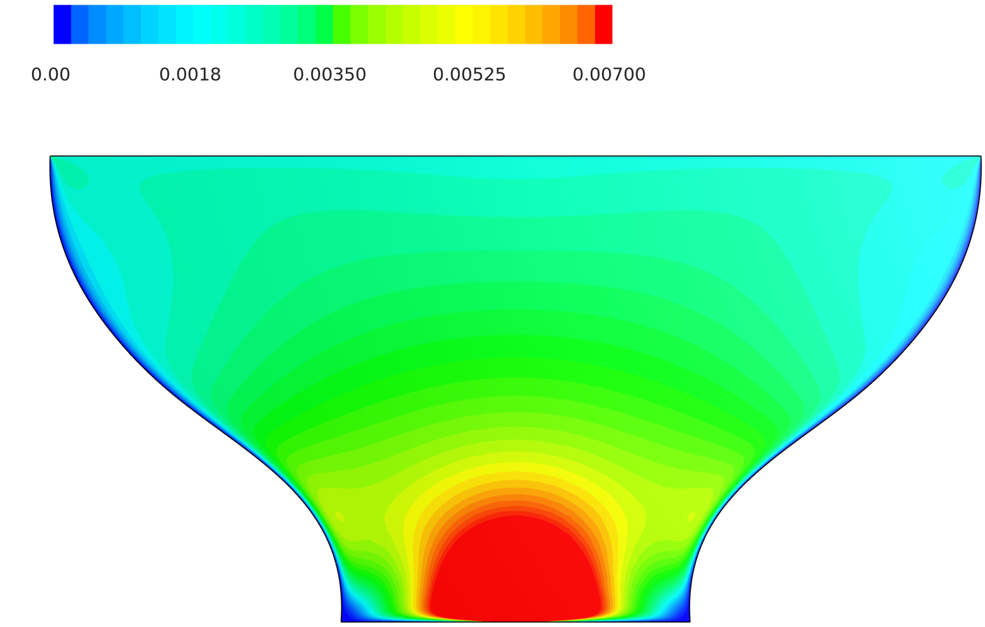


Druckabfall:

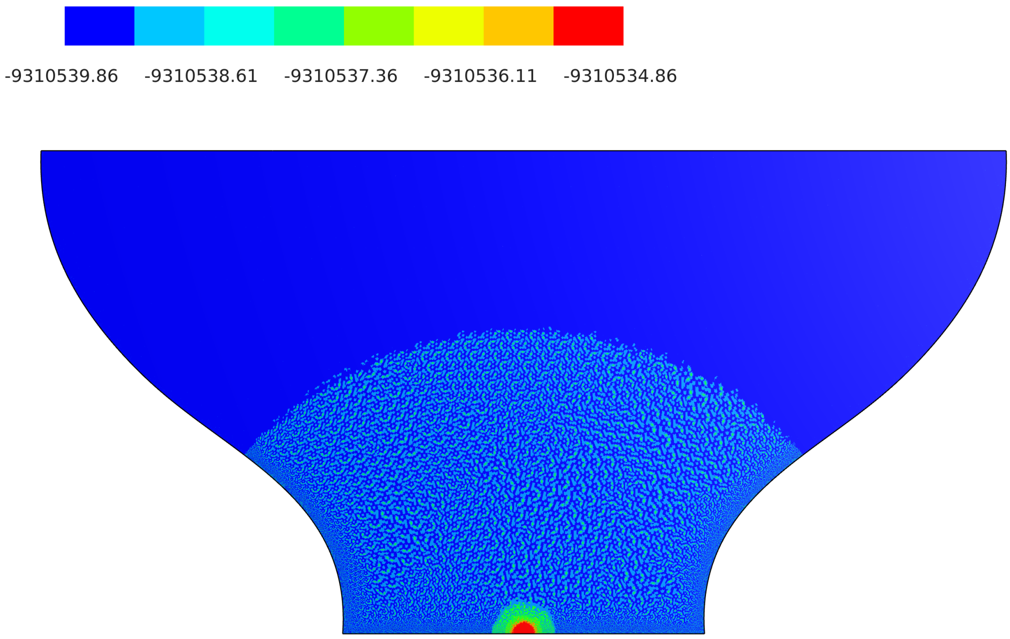


1 Loch mit Lochdurchmesser 0.001mm

Flussgeschwindigkeit:



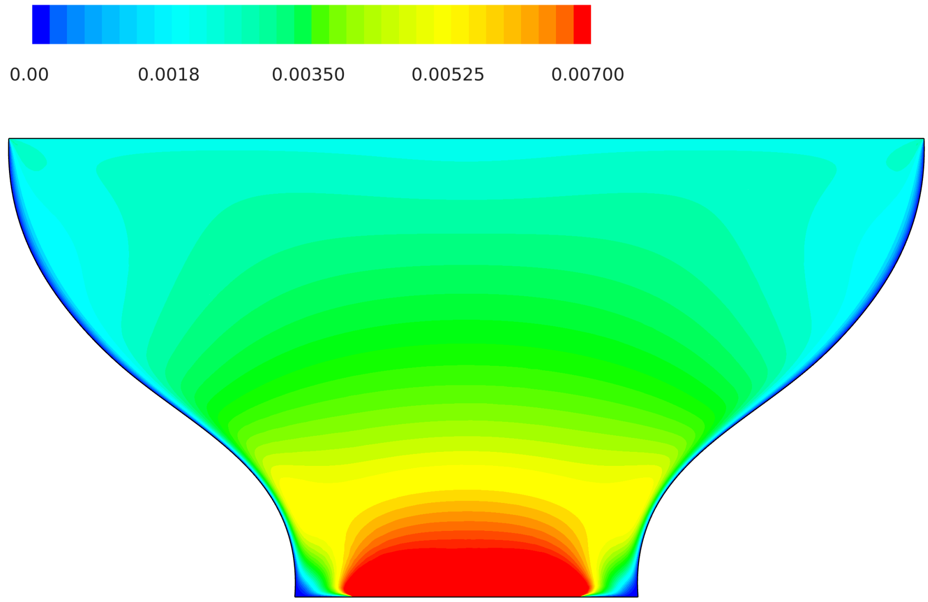
Druckabfall:



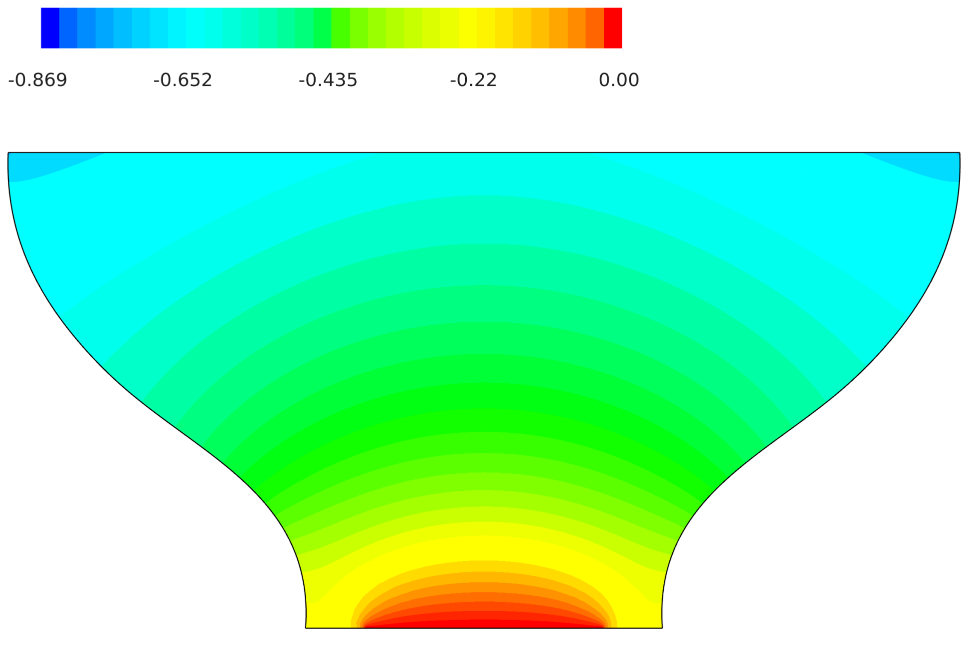
Hier scheint es einen numerischen Fehler zu geben. Vermutlich sind die Floatingpoint-Zahlen nicht in der Lage die entsprechend kleinen Variationen darzustellen.

1 Loch mit Lochdurchmesser 1cm

Flussgeschwindigkeit:



Druckabfall:



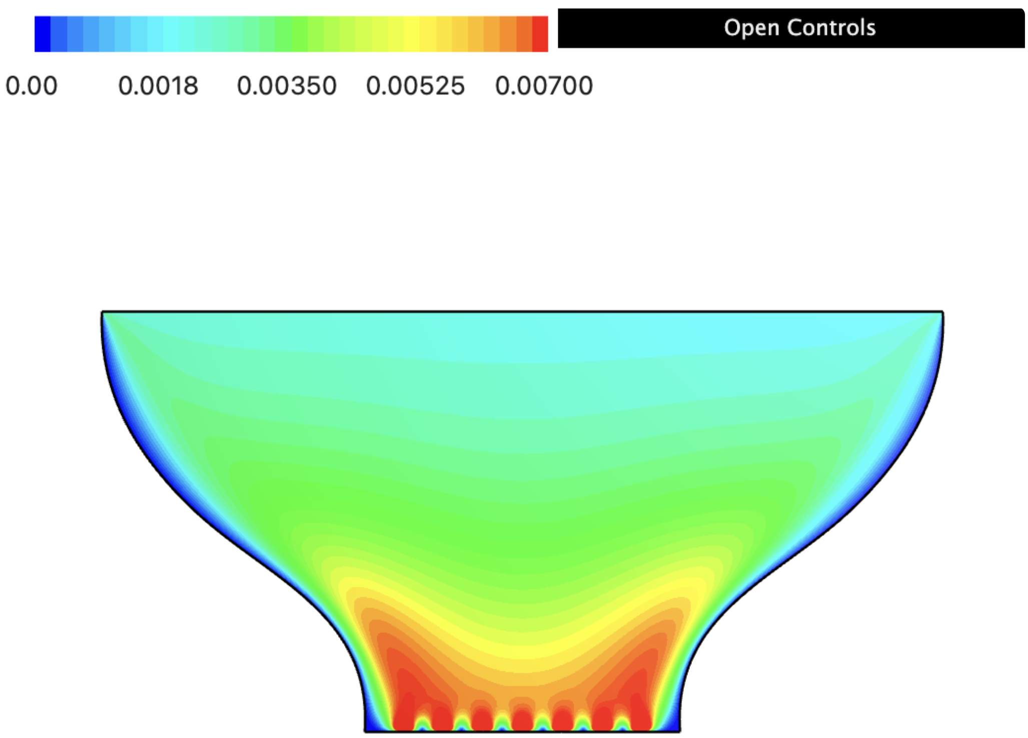
Aufgabe 4

> ❓ Question
>
> Berechnen Sie den Druckabfall für den Fall, dass kein Pulver im Kaffeesieb ist.

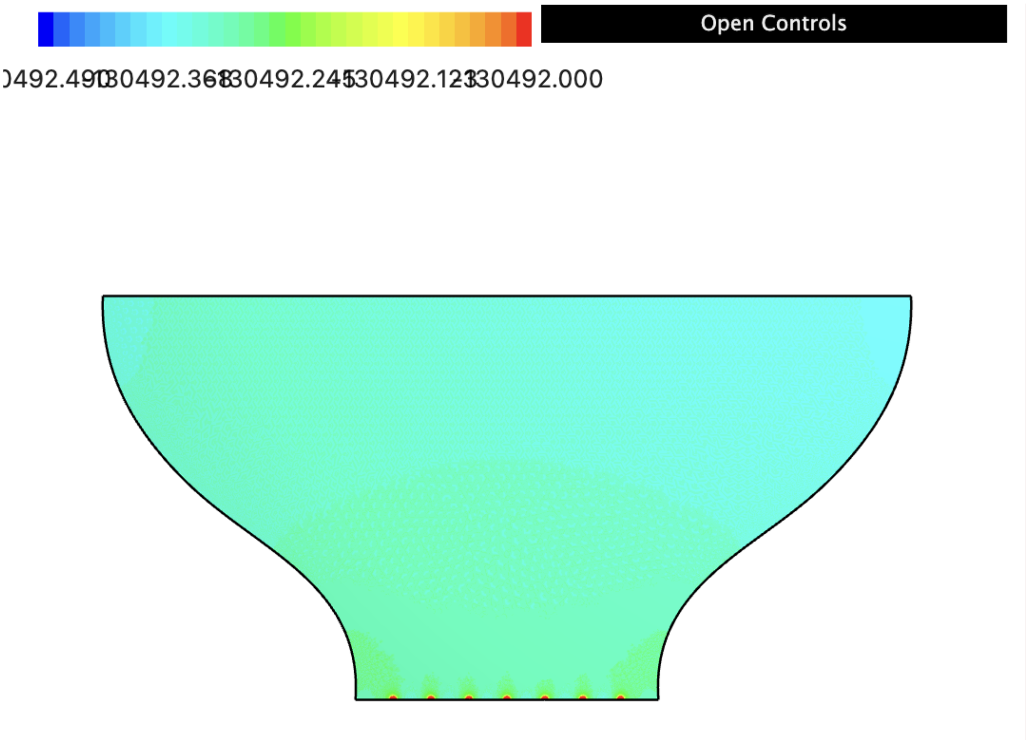
Im Falle eines leeren Espresso-Siebs ist $\varphi = 1$ und $dP = 0$. Da somit $K = 0$, ist die Division $\frac{c_F}{K^{1/2}}$ nicht definiert. Wir haben daher 2 verschiedene Ansätze ausprobiert, welche beide auf dasselbe Ergebnis gekommen sind:

- Anstelle mit $\varphi = 1$ und $dP = 0$ zu rechnen haben wir ein $\varepsilon = 10^{-11}$ bestimmt und $\varphi = 1 - \varepsilon$ sowie $dP = \varepsilon$ verwendet.
- Alternativ kann der `porous` Teil aus der Gleichung komplett entfernt werden.

Flussgeschwindigkeit:



Druckabfall:



Der Druck innerhalb des Espresso-Siebs ist grösstenteils gleich. Einzig neben den Löchern ist der Druck marginal grösser.